

Beweisbar sichere Verschlüsselung

ITS-Wahlpflichtvorlesung

Dr. Bodo Möller

Ruhr-Universität Bochum
Horst-Görtz-Institut für IT-Sicherheit
Lehrstuhl für Kommunikationssicherheit
bmoeller@crypto.rub.de

Überblick

- *PRP* (Pseudo-Random Permutation) *als PRF* (Pseudo-Random Function)
- ... und sichere *Einmalverschlüsselung* damit (RoR-OTCPA, LoR-OTCPA)
- ... und sichere Verschlüsselung auch für Mehrfachnutzung (*RoR-CPA*, *LoR-CPA*)!

PRP als PRF

Warum *Pseudo-Random Permutation* als *Pseudo-Random Function* einsetzen?

- Wir haben effiziente Blockchiffren wie AES.
Die Blockverschlüsselung liefert Permutationen $E_K: \{0, 1\}^\ell \rightarrow \{0, 1\}^\ell$, die sich bei unbekanntem Schlüssel „wie zufällig“ verhalten sollen
→ PRP als Primitive verfügbar (PRP-Sicherheit wird ohne Beweis vermutet)
- Oft nützlich ist aber ein PRF:
siehe die Konstruktion eines PRG aus einer PRF letzte Woche, Verschlüsselung aus einem PRG in Aufgabe 1.2
- PRF ist sehr ähnlich wie PRP:
allgemeine Funktion $\{0, 1\}^\ell \rightarrow \{0, 1\}^\ell$
statt Bijektion $\{0, 1\}^\ell \rightarrow \{0, 1\}^\ell$

PRP als PRF (Forts.)

- Um die *Sicherheit von PRP und PRF* zu „messen“, hatten wir folgende *Vorteile* verwendet:

$$\text{Adv}_{E,A}^{\text{PRP}} = \Pr_{K \in \mathcal{K}}[\mathbf{A}^{E_K(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr_{\pi \in \mathcal{P}}[\mathbf{A}^{\pi(\cdot)} \Rightarrow 1],$$

$$\text{Adv}_{E,A}^{\text{PRF}} = \Pr_{K \in \mathcal{K}}[\mathbf{A}^{E_K(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr_{f \in \mathcal{F}}[\mathbf{A}^{f(\cdot)} \Rightarrow 1]$$

$\text{Func}(\{0, 1\}^\ell)$ ist die Menge aller Abbildungen $\{0, 1\}^\ell \rightarrow \{0, 1\}^\ell$,
 $\text{Perm}(\{0, 1\}^\ell) \subseteq \text{Func}(\{0, 1\}^\ell)$ sind die Bijektionen.

Schreiben wir kürzer

$$\Pr_K[\dots] \quad \text{für} \quad \Pr_{K \in \mathcal{K}}[\dots],$$

$$\Pr_\pi[\dots] \quad \text{für} \quad \Pr_{\pi \in \mathcal{P}}[\dots],$$

$$\Pr_f[\dots] \quad \text{für} \quad \Pr_{f \in \mathcal{F}}[\dots].$$

PRP als PRF (Forts.)

- Wir gehen von PRP-Sicherheit aus und wollen PRF-Sicherheit zeigen ...
- ... also beweisen: Gibt es einen erfolgreichen PRF-Angreifer, so haben wir damit auch einen erfolgreichen PRP-Angreifer.
- Diesmal müssen wir den Angreifer nicht speziell konstruieren, sondern setzen den PRF-Angreifer \mathcal{A} direkt als PRP-Angreifer ein!
- Auf Gleichheit $\text{Adv}_{E,\mathcal{A}}^{\text{PRP}} = \text{Adv}_{E,\mathcal{A}}^{\text{PRF}}$ können wir i. a. nicht hoffen.
Unser Ziel: Zeigen, dass $|\text{Adv}_{E,\mathcal{A}}^{\text{PRP}} - \text{Adv}_{E,\mathcal{A}}^{\text{PRF}}|$ klein sein muss!

PRP als PRF (Forts.)

- Unser Ziel: Zeigen, dass $|\text{Adv}_{E,\mathcal{A}}^{\text{PRP}} - \text{Adv}_{E,\mathcal{A}}^{\text{PRF}}|$ klein sein muss!
- Es ist

$$\begin{aligned} \text{Adv}_{E,\mathcal{A}}^{\text{PRP}} - \text{Adv}_{E,\mathcal{A}}^{\text{PRF}} &= \left(\Pr_K[\mathcal{A}^{E_K(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr_\pi[\mathcal{A}^{\pi(\cdot)} \Rightarrow 1] \right) \\ &\quad - \left(\Pr_K[\mathcal{A}^{E_K(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr_f[\mathcal{A}^{f(\cdot)} \Rightarrow 1] \right) \\ &= \Pr_f[\mathcal{A}^{f(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr_\pi[\mathcal{A}^{\pi(\cdot)} \Rightarrow 1], \end{aligned}$$

also bleibt nur zu zeigen, dass

$$|\Pr_f[\mathcal{A}^{f(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr_\pi[\mathcal{A}^{\pi(\cdot)} \Rightarrow 1]|$$

klein ist.

- Um welches konkrete E_K es geht, ist hier also egal!

PRP als PRF (Forts.)

- Unsere Aufgabe lautet also: Untersuche

$$|\Pr_{f \in \mathcal{F}_{\text{Func}}(\{0,1\}^\ell)}[\mathbf{A}^{f(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr_{\pi \in \mathcal{F}_{\text{Perm}}(\{0,1\}^\ell)}[\mathbf{A}^{\pi(\cdot)} \Rightarrow 1]|$$

- Auch das können wir als „Vorteil“ auffassen:
Wie gut kann \mathbf{A} zufällige Abbildungen $\{0,1\}^\ell \rightarrow \{0,1\}^\ell$ von zufälligen Bijektionen $\{0,1\}^\ell \rightarrow \{0,1\}^\ell$ unterscheiden?
- Idee, damit \mathbf{A} hier einen Erfolg erzielen kann:
Einen Unterschied von allgemeinen Abbildungen gegenüber Bijektionen gibt es nur bei $x \neq y$ mit $f(x) = f(y)$
- Weil gleichverteilt *alle* Abbildungen bzw. Bijektionen betrachtet werden, sind keine bestimmten x, y von vornherein besser als andere

PRP als PRF (Forts.)

- Um allgemein Abbildungen und Bijektionen zu unterscheiden, kann $\mathbf{A}^{E(\cdot)}$ verschiedene Werte durchprobieren und etwa folgendes abfragen:

$E(00\dots0000),$
 $E(00\dots0001),$
 $E(00\dots0010),$
 $E(00\dots0011),$
 $E(00\dots0100),$
 $E(00\dots0101),$
 ...

Gibt es irgendwann eine *Kollision* (nämlich $x \neq y$ mit $E(x) = E(y)$), so liegt keine Bijektion vor; andernfalls könnte es beides sein (Bijektion, allgemeine Abbildung).

- Erst nach Abfragen *aller* Werte $E(x)$, $x \in \{0,1\}^\ell$ könnte $\mathbf{A}^{E(\cdot)}$ Bijektionen und allgemeine Abbildungen völlig zuverlässig unterscheiden. Aber das benötigt 2^ℓ Orakel-Anfragen (nur bei sehr kleinem ℓ realistisch).

PRP als PRF (Forts.)

- Um $|\Pr_f[\mathbf{A}^{f(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr_\pi[\mathbf{A}^{\pi(\cdot)} \Rightarrow 1]|$ abzuschätzen, müssen wir also die Anzahl q der Anfragen an das Orakel berücksichtigen.
- Von der Beschränkung durch q abgesehen lassen wir hier beliebiges \mathbf{A} zu (sonst keine Ressourcenbeschränkung!)
- Bis jetzt haben wir getrennte Wahrscheinlichkeitsräume: einerseits $\Pr_{f \in \mathfrak{F}\text{Func}(\{0,1\}^\ell)[\dots]}$, andererseits $\Pr_{\pi \in \mathfrak{F}\text{Perm}(\{0,1\}^\ell)[\dots]}$
- Wir wollen eine gemeinsame Darstellung finden: zwei Varianten *eines* Spiels mit klarem Zusammenhang
- Also konstruiere Orakel $E_{\text{Func}(\cdot)}$ und $E_{\text{Perm}(\cdot)}$, die sich verhalten wie oben, und betrachte dann $|\Pr[\mathbf{A}^{E_{\text{Func}(\cdot)}} \Rightarrow 1] - \Pr[\mathbf{A}^{E_{\text{Perm}(\cdot)}} \Rightarrow 1]|$

PRP als PRF (Forts.)

Zuerst $E_{\text{Func}(\cdot)}$:

Initialisierung

Für jedes $x \in \{0,1\}^\ell$:

$$F[x] \leftarrow \perp$$

Orakelfunktionalität: Wenn \mathbf{A} eine Frage x sendet ...

Falls $F[x] = \perp$, dann

$$c \xleftarrow{\mathfrak{S}} \{0,1\}^\ell$$

$$F[x] \leftarrow c$$

Gib $F[x]$ zurück als Orakelantwort

Für \mathbf{A} kein Unterschied zwischen $\mathbf{A}^{E_{\text{Func}(\cdot)}}$ und $\mathbf{A}^{f(\cdot)}$, $f \in \mathfrak{F}\text{Func}(\{0,1\}^\ell)$!

PRP als PRF (Forts.)

Dann $E_{\text{Perm}}(\cdot)$:

Initialisierung

Für jedes $x \in \{0, 1\}^\ell$:
 $F[x] \leftarrow \perp$

Orakelfunktionalität: Wenn \mathcal{A} eine Frage x sendet ...

Falls $F[x] = \perp$, dann

$c \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\ell \setminus \bigcup_{x \in \{0, 1\}^\ell} \{F[x]\}$
 $F[x] \leftarrow c$

Gib $F[x]$ zurück als Orakelantwort

Für \mathcal{A} kein Unterschied zwischen $\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)}$ und $\mathcal{A}^{\pi(\cdot)}$, $\pi \in_{\$} \text{Perm}(\{0, 1\}^\ell)$!

PRP als PRF (Forts.)

$E_{\text{Perm}}(\cdot)$ sieht so aber noch recht anders aus als $E_{\text{Func}}(\cdot)$.

Wir können $E_{\text{Perm}}(\cdot)$ auch so beschreiben:

Initialisierung

Für jedes $x \in \{0, 1\}^\ell$:
 $F[x] \leftarrow \perp$

Orakelfunktionalität: Wenn \mathcal{A} eine Frage x sendet ...

Falls $F[x] = \perp$, dann

$c \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\ell$
 Falls $c \in \bigcup_{x \in \{0, 1\}^\ell} \{F[x]\}$, dann

$c \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\ell \setminus \bigcup_{x \in \{0, 1\}^\ell} \{F[x]\}$
 $F[x] \leftarrow c$

Gib $F[x]$ zurück als Orakelantwort

Jetzt stimmt der innere Ablauf von $E_{\text{Func}}(\cdot)$ und $E_{\text{Perm}}(\cdot)$ weitergehend überein.

Noch eine Änderung, um den Unterschied „messen“ zu können ...

PRP als PRF (Forts.)

Wir führen ein Flag *bad* ein, das bei der Abweichung gesetzt wird.

Neue Beschreibung für $E_{\text{Perm}}(\cdot)$:

Initialisierung

Für jedes $x \in \{0, 1\}^\ell$:

$$F[x] \leftarrow \perp$$

$$\textit{bad} \leftarrow \textit{false}$$

Orakelfunktionalität: Wenn \mathcal{A} eine Frage x sendet ...

Falls $F[x] = \perp$, dann

$$c \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\ell$$

Falls $c \in \bigcup_{x \in \{0, 1\}^\ell} \{F[x]\}$, dann

$$\textit{bad} \leftarrow \textit{true}$$

$$c \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\ell \setminus \bigcup_{x \in \{0, 1\}^\ell} \{F[x]\}$$

$$F[x] \leftarrow c$$

Gib $F[x]$ zurück als Orakelantwort

PRP als PRF (Forts.)

Gemeinsame Beschreibung für $E_{\text{Func}}(\cdot)$ und $E_{\text{Perm}}(\cdot)$:

Initialisierung

Für jedes $x \in \{0, 1\}^\ell$:

$$F[x] \leftarrow \perp$$

$$\textit{bad} \leftarrow \textit{false}$$

Orakelfunktionalität: Wenn \mathcal{A} eine Frage x sendet ...

Falls $F[x] = \perp$, dann

$$c \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\ell$$

Falls $c \in \bigcup_{x \in \{0, 1\}^\ell} \{F[x]\}$, dann

$$\textit{bad} \leftarrow \textit{true}$$

Im Fall von $E_{\text{Perm}}(\cdot)$:

$$c \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\ell \setminus \bigcup_{x \in \{0, 1\}^\ell} \{F[x]\}$$

$$F[x] \leftarrow c$$

Gib $F[x]$ zurück als Orakelantwort

Verhaltensunterschied zwischen $E_{\text{Func}}(\cdot)$ und $E_{\text{Perm}}(\cdot)$ nur möglich, wenn *bad* gesetzt wird!

PRP als PRF (Forts.)

Verhaltensunterschied zwischen $E_{\text{Func}}(\cdot)$ und $E_{\text{Perm}}(\cdot)$ nur möglich, wenn bad gesetzt wird!

Sei "Bad" das Ereignis, das im Spielablauf irgendwann $bad \leftarrow true$ gesetzt wird.

Also:

$$\Pr \left[\overline{\text{Bad}} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] = \Pr \left[\overline{\text{Bad}} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right]$$

Wir interessieren uns für

$$\left| \Pr \left[\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1 \right] - \Pr \left[\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1 \right] \right|,$$

also zerlegen wir die Ereignisse passend ...:

PRP als PRF (Forts.)

Bekannt: $\Pr \left[\overline{\text{Bad}} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] = \Pr \left[\overline{\text{Bad}} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right]$

Zu untersuchen: $\left| \Pr \left[\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1 \right] - \Pr \left[\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1 \right] \right|$

$$\begin{aligned} & \Pr \left[\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1 \right] - \Pr \left[\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1 \right] \\ &= \Pr \left[\text{Bad} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] + \Pr \left[\overline{\text{Bad}} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] \\ &\quad - \Pr \left[\text{Bad} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] - \Pr \left[\overline{\text{Bad}} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] \\ &= \Pr \left[\text{Bad} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] - \Pr \left[\text{Bad} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] \\ &\leq \Pr \left[\text{Bad} \wedge (\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1) \right] \\ &\leq \Pr [\text{Bad}] \end{aligned}$$

PRP als PRF (Forts.)

Völlig analog zu

$$\Pr [\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr [\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1] \leq \Pr [\text{Bad}]$$

lässt sich auch zeigen

$$\Pr [\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr [\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1] \leq \Pr [\text{Bad}],$$

also insgesamt

$$\left| \Pr [\mathcal{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr [\mathcal{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1] \right| \leq \Pr [\text{Bad}].$$

Es bleibt, $\Pr [\text{Bad}]$ nach oben abzuschätzen.

PRP als PRF (Forts.)

$\Pr [\text{Bad}]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass hier jemals $bad \leftarrow \text{true}$ gesetzt wird:

Initialisierung

Für jedes $x \in \{0, 1\}^\ell$:

$$F[x] \leftarrow \perp$$

$$bad \leftarrow \text{false}$$

Orakelfunktionalität: Wenn \mathcal{A} eine Frage x sendet ...

Falls $F[x] = \perp$, dann

$$c \xleftarrow{\$} \{0, 1\}^\ell$$

Falls $c \in \bigcup_{x \in \{0, 1\}^\ell} \{F[x]\}$, dann

$$bad \leftarrow \text{true}$$

...

$$F[x] \leftarrow c$$

Gib $F[x]$ zurück als Orakelantwort

Ganz klar abhängig von q , der (maximalen) Anzahl der Aufrufe des Orakels durch \mathcal{A} ...

PRP als PRF (Forts.)

$$q = 0 \Rightarrow \Pr[\text{Bad}] = 0$$

$$q = 1 \Rightarrow \Pr[\text{Bad}] = 0$$

$$q = 2 \Rightarrow \Pr[\text{Bad}] \leq \frac{1}{2^\ell}$$

$$q = 3 \Rightarrow \Pr[\text{Bad}] \leq \frac{1}{2^\ell} + \frac{2}{2^\ell}$$

$$q = 4 \Rightarrow \Pr[\text{Bad}] \leq \frac{1}{2^\ell} + \frac{2}{2^\ell} + \frac{3}{2^\ell}$$

... ..

und allgemein

$$\Pr[\text{Bad}] \leq \frac{1}{2^\ell} + \frac{2}{2^\ell} + \dots + \frac{q-1}{2^\ell} = \frac{q(q-1)}{2^{\ell+1}}$$

PRP als PRF (Forts.)

Es folgt also

$$\left| \Pr[\mathbf{A}^{E_{\text{Func}}(\cdot)} \Rightarrow 1] - \Pr[\mathbf{A}^{E_{\text{Perm}}(\cdot)} \Rightarrow 1] \right| \leq \frac{q(q-1)}{2^{\ell+1}}$$

und damit

$$|\text{Adv}_{E,\mathbf{A}}^{\text{PRP}} - \text{Adv}_{E,\mathbf{A}}^{\text{PRF}}| \leq \frac{q(q-1)}{2^{\ell+1}}.$$

Das ist das sogenannte *PRP/PRF Switching Lemma*.

Es besagt: Solange q genügend klein bleibt, sind PRP-Sicherheit und PRF-Sicherheit ungefähr das gleiche.

(Spätestens um $q \approx 2^{\ell/2}$ herum wird es völlig nutzlos!

Dort sagt es nur noch $|\text{Adv}_{E,\mathbf{A}}^{\text{PRP}} - \text{Adv}_{E,\mathbf{A}}^{\text{PRF}}| \leq \frac{1}{2}$.)

Einmalverschlüsselung mit dem Counter Mode

- Wir haben gerade gesehen: Ein PRP (z. B. eine Blockchiffre) ist auch ein PRF.
- Letzte Woche: Aus einem PRF können wir einen PRG konstruieren –
verwende Präfixe von $E_K(00\dots0000) \parallel E_K(00\dots0001) \parallel E_K(00\dots0010) \parallel \dots$
- In Aufgabe 1.2: Mit einem PRG können wir verschlüsseln
(sicher für Einmalverschlüsselung – RoR-OTCPA, LoR-OTCPA)
durch XOR mit PRG-Wert der passenden Länge
- Das so von einer Blockchiffre abgeleitete Verschlüsselungsschema nennt sich
Counter Mode, oft auch abgekürzt *CTR Mode*.
- Quantitative Sicherheit:
RoR-OTCPA-Vorteil bei Verschlüsselung von bis zu $q \cdot \ell$ Bits?
→ Übungsaufgabe 2.4!

Mehrfachverschlüsselung mit dem Counter Mode

- XOR mit einem Präfix von
 $E_K(00\dots0000) \parallel E_K(00\dots0001) \parallel E_K(00\dots0010) \parallel \dots$
ist sicher für Einmalverschlüsselung (RoR-OTCPA, LoR-OTCPA).
- Sicherheit für *mehrfache* Verschlüsselung (RoR-CPA, LoR-CPA)
ist leicht herzustellen!
- Nehmen wir an, ℓ ist gerade. Ist $iv \in \{0, 1\}^{\ell/2}$, können wir
XOR mit einem Präfix von
 $E_K(iv \parallel 00\dots0000) \parallel E_K(iv \parallel 00\dots0001) \parallel E_K(iv \parallel 00\dots0010)$
verwenden ($\ell/2$ Bits für iv , die verbleibenden $\ell/2$ Bits für den Zähler).
- Wählen wir $iv \in_{\mathcal{S}} \{0, 1\}^{\ell/2}$ *stets neu* im Verschlüsselungsalgorithmus
(als *Initialization Vector*), so haben wir ein Verschlüsselungsschema
für Mehrfachverschlüsselung!
- Beschreibung des Verschlüsselungsschemas: → Aufgabe 2.3
- Sicherheit quantitativ? → Aufgabe 2.5